ТОКМАГАМБЕТОВ НАРИМАН САРСЕНОВИЧ

КВАНТОВОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности 6D060100-Математика

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена квантовым исчислениям и их приложениям в дифференциальных уравнениях с дробными производными.

В математике квантовое исчисление, иногда называемое исчислением без ограничений, эквивалентно традиционному исчислению бесконечно малых без понятия пределов. Он определяет q-исчисление и h-исчисление. Развитие этих двух ветвей берет свое начало с исследований П. Ченга и В. Каса в начале 20 века.

В начале 18 века Л. Эйлер предложил наиболее распространенный язык квантовых исчислений — q-исчисление. В 1748 году он рассмотрел бесконечное произведение в виде $(q;q)_\infty^{-1} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1-q^{k+1}}, |q|<1$ как производящую функцию для $p(n)$. Кроме того, он открыл первые две q -экспоненциальные функции; это, в свою очередь, было предпосылкой теоремы о q-биномиале. Через сто лет этот исследовательский процесс продолжил Э. Хейн.

В 1987 г. А. Лупас впервые начал использовать q-исчисление в области теории приближений. Он впервые ввел полиномы q-Бернштейна, и эти исследования получили широкое развитие. Важная информация о результатах исследований содержится в книге. Также мы особо отметим работу Т. Эрнста. В этом источнике упоминаются многие приложения q-исчисления в теории колебаний, теории интерполяции, квантовых группах, квантовых алгебрах, гипергеометрических рядах, комплексном анализе и физике элементарных частиц.

Сегодня существует значительный интерес к этим темам, и q-исчисление служило мостом между математикой и физикой в течение последних двух десятилетий. q-исчисление имеет множество приложений в различных областях математики, таких как динамические системы, теория чисел, комбинаторика, специальные функции, фракталы, и широко используется в научных задачах в некоторых прикладных областях, таких как информатика, квантовая механика и др. квантовая физика. Большую часть дополнительной информации можно найти в работе Дж. Гаспера и М. Рахмана, содержащей простые доказательства многих результатов (например, q-формулы Клаузена, q-ортогональных полиномов, q-аналогов различных формул умножения и т. д.) и важные приложения в других областях (например, современная алгебра, вещественный и комплексный анализ, теория чисел и т. д.).

В последние три десятилетия дробные дифференциальные уравнения привлекают большое внимание и широко используются в явлениях, связанных с физикой, химией, биологией, обработкой сигналов и изображений, а также пищевыми добавками, погодой и экономикой и т. д. включает социальные сферы. Так, обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения с дробными производными получили значительное развитие, по этой теме опубликовано большое количество статей и несколько книг в различных областях, например Т. Сандев и З. Томовский, А.А. Килбас и др., Р. Хильфер, монографии К.С. Миллера и Б. Россы и ссылки в них.

Дробное исчисление — это один из разделов математики, изучающий интегрирование и дифференцирование действительного или сложного порядка. Уравнения дробного порядка, основанные на дробной производной Римана-Лиувилля и Капуто, требуют начальных условий для уравнений целого порядка. Соответственно, уравнения с дробными производными привлекли интерес исследователей в различных областях.

С происхождением q-разностного исчисления можно ознакомиться в работах Ф. Джексон и Р.Д. Кармайкла, это начало двадцатого века. Недавно У. Алсалам и Р.П. Агарвал предложили q-разностное дробное исчисление. Сегодня, возможно, из-за быстрого роста исследований в области дробного q-дифференциального исчисления, новые разработки в теории дробного q-дифференциального исчисления были подробно рассмотрены несколькими исследователями. Например, некоторые исследователи получили q-аналоги свойств интегральных и дифференциальных дробных операторов.

Следует отметить, что до сих пор большое внимание уделялось q-дифференциальным уравнениям. Опубликовано несколько работ о существовании, сингулярности или кратности решений нелинейных q-дифференциальных дробных уравнений с использованием некоторых известных теорем о неподвижной точке.

Однако теория q-дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами все еще находится в зачаточном состоянии, и многие аспекты этой теории еще требуют исследования. Как известно, теория задачи Коши для линейных, однородных и неоднородных дифференциальных уравнений, основанная на главной дробной производной Капуто, все еще находится в стадии разработки.

Поэтому использование квантовых исчислений, в том числе q-исчислений, при нахождении решений дифференциальных уравнений с дробными производными является актуальным.

Цель работы. Применение q-исчисления в квантовых исчислениях к уравнениям с дробными производными, нахождение их решений и доказательство их существования и единственности.

Задачи исследования. Для достижения основной цели необходимо решить следующие задачи:

- Доказать эквивалентность нелинейной задачи типа Коши с дробной q-производной Римана-Лиувилля и q-интегральным уравнением Вольтерра. На основании этой теоремы получить существование и единственность единственного решения задачи типа Коши в пространстве $L^1_{q,a+}[a,b]$;
- Получить существование и единственность решения задачи типа Коши линейной задачи типа Коши с дробной q-производной Капуто ${}^cD^{\alpha}_{q,0+}f$ порядка $\alpha > 0$;
- Получение q-аналога q-дробной производной Гильфера. Доказательство эквивалентности q-интегрального уравнения Вольтерра нелинейной задачи типа Коши с q-дробной производной Гильфера. На основании этой теоремы получение существования и единственности единственного решения задачи типа Коши в пространстве $L^1_{\alpha,\beta,q}[a,b]$;
- Получение точных решений новой модификации уравнения Шрёдингера, полученной с помощью q-оператора Бесселя. Доказательство существования и единственности этого решения в пространстве соболевского типа $W^2_q\left(R^+_q\right)$.

Объект исследования: q-дифференциальные уравнения с дробными производными. Линейная задача типа Коши с q-дробной производной Римана-Лиувилля. Нелинейная задача типа Коши с q-дробной производной Римана-Лиувилля. Линейная задача типа Коши с q-дробной производной Капуто. Уравнение Шредингера, заданное q-оператором Бесселя. Нелинейные дробные q-дифференциальные уравнения с q-дробной производной типа Гильфера.

Методы исследования. В диссертации используетсяся метод последовательных приближений для построения решения q-дифференциального уравнения с дробной производной в квантовых исчислениях и определения его единственности. Путем применения q-преобразования Бесселя Фурье к задаче типа Коши использовались методы перехода к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Научная новизна. Решения дробных дифференциальных уравнений в квантовых вычислениях с использованием дробных производных Римана-Лиувилля, Капуто и Гильфера.

Результаты выносимые на защиту:

- Доказана теорема эквивалентности нелинейной задачи типа Коши с q-дробной производной Римана-Лиувилля и q-интегрального уравнения

Вольтерра, на основании которой доказано существование и единственность единственного решения задачи типа Коши в пространство $L^1_{\alpha,q}[a,b]$ получено;

- Доказано существование и единственность решения некоторой линейной задачи типа Коши с q -дробной производной Римана-Лиувилля;

- Доказано существование и единственность решения линейной задачи типа Коши с q -дробной производной Капуто ${}^cD^{\alpha}_{q,0+}f$ порядка $\alpha>0$;

- Получены точные решения новой модификации уравнения Шредингера, полученные с помощью q-оператора Бесселя. Доказано существование и единственность этого решения в пространстве соболевского типа $W^2_q\left(R^+_q\right)$.

- Получен q -аналог дробной производной Гильфера.

- Доказана теорема эквивалентности q-интегрального уравнения Вольтерра нелинейной задачи типа Коши с q -дробной производной Гильфера. На основании этой теоремы получено существование и единственность единственного решения задачи типа Коши в пространстве $L^1_{\alpha,\beta,q}[a,b]$.

Теоретическая и практическая ценность результатов. Это исследование в значительной степени является фундаментальным и внесет большой вклад в развитие квантовых вычислений в уравнениях с дробными производными.

Личный вклад соискателя. Исследовательская работа, представленная в диссертации, выполнена при непосредственном участии автора. Доказаны нелинейная задача типа Коши q -дробной производной Римана-Лиувилля и ее эквивалентность интегральному уравнению Вольтерра, методом последовательных приближений доказаны теоремы о существовании и единственности решения. Получен новый q -дробной производной аналог дробной q-производной Гильфера, доказана его эквивалентность интегральному уравнению Вольтерра, методом последовательных приближений доказаны теоремы о существовании и единственности решения. Полученные результаты были опубликованы в виде научных статей и научных тезисов.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты работы представлены на конференциях:

- XV Международная научная конференция студентов и молодых ученых «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2020» (Нур-Султан, 2020);
- Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования (Алматы, 2020);
- XVI Международная научная конференция студентов и молодых ученых «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2021» (Нур-Султан, 2021);

- 1 международная научно-практическая конференция «IMPORTANCE OF SOFT SKILLS FOR LIFE AND SCIENTIFIC SUCCESS» (Украина, 2022).

Индивидуальные результаты диссертации:

- выступление на научном семинаре «Функциональный анализ и его приложения» (руководители семинара - академики НАН РК М. Отелбаев и Р. Ойнаров, профессора Е.Д. Нурсултанов, К.Н. Оспанов);
- обсуждались на научных семинарах в Техническом университете Лулео и в Университете Тромсё - Арктическом университете Норвегии, под руководством профессора Л.Е. Перссона;
- неоднократно представлялись и обсуждались на научном семинаре «Весовые неравенства и их приложения» (руководители семинара - академик НАН РК Р. Ойнаров, доценты Темирханова А.М., Абылаева Б.М., доцент Алдай М.).

Опубликованные результаты работы.

По материалам диссертационной работы опубликовано 8 научных работ, из них: 1 статья – в рецензируемом научном журнале, входящем в базу данных Web of Science и Scopus (Web of Science, Impact factor – 1.25, 2020, Q2), 3 статьи – в журналах, входящих в перечень, рекомендуемый ККСОН МОН РК, 4 публикаций в материалах международных научных конференций, в том числе 1 публикация в материалах зарубежных международных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Общий объем диссертации 76 страницы.

Первая глава содержит все формулы, определения и леммы, необходимые для доказательства теорем второй и третьей глав.

Во второй главе рассматривается нелинейная задача типа Коши для уравнения Римана-Лиувилля с q-дробной производной. Доказана теорема эквивалентности, доказано существование и единственность решения задачи типа Коши в заданном пространстве. Также определен q-аналог оператора производной Гильфера. Доказаны теоремы эквивалентности для q-дробной задачи типа Коши и q-интегрального уравнения Вольтера.

В третьей главе были рассмотрены точные и численные решения дробно-линейных q-дифференциальных уравнений и задач типа Коши, связанных с дробной q-производной Римана-Лиувилля в q-исчислении. Кроме того, созданы точные решения дробно-линейных q-дифференциальных уравнений с q-дробной производной Капута порядка $\alpha > 0$. Кроме того, получены точные решения новой модификации уравнения Шредингера, связанного с q-оператором Бесселя. Доказана теорема существования этого решения в пространстве соболевского типа в q-исчислении.

В заключении сформулированы основные выводы и описана область их применения. Диссертация заканчивается списком использованной литературы.